Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală – Maramureş
28.02.2015
Varianta II

Clasa a IX-a

1. Arătaţi că $|x-3|+|x-2|+|x-1|+|x+1|+|x+2|+|x+3|\geq 12, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\{2014\cdot a\}=\{2014\cdot b\}$ şi $\{2015\cdot a\}=\{2015\cdot b\}$.

a) Să se arate că $\{n\cdot a\}=\{n\cdot b\}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, dacă, în plus are loc $[a]+\left[\frac{2a+1}{2}\right]=a+\frac{1}{2}-\{2b\}$.

3. Se consideră o mulţime $G\subset\mathbb{R}$ care satisface simultan proprietăţile:

a) $1\in G$

b) $x\in G\Rightarrow\sqrt{x+2}\in G$

c) $\sqrt{x+3}\in G\Rightarrow(x+4)\in G$.

Arătaţi că $\sqrt{2015}\in G$.

(Problema 27001, G.M. 12/2014)

4. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ şi P - mijlocul lui $[MN]$.
Să se arate că dacă $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{PA}$, atunci BN şi CM sunt mediane.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate şi prelucrate de: prof. Gabriela Boroica, C.N.”Vasile Lucaciu”
prof. Nicolae Muşuroia, C.N. “Gheorghe Şincai”

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală – Maramureş
28.02.2015
Varianta II

Clasa a IX-a BAREM

1. $|x-a|+|x+a|=|a-x|+|x+a|\geq|a-x+a+x|=2a$ **4p**
Prin adunarea celor trei relaţii obţinem concluzia **3p**

2. a) $\{2014a\}=\{2014b\}\Rightarrow 2014(a-b)=[2014a]-[2014b]\Rightarrow 2014(a-b)\in\mathbb{Z}$ **2p**

Analog $2015(a-b)\in\mathbb{Z}$. Din cele două relaţii, rezultă că $a-b\in\mathbb{Z}$ **1p**

Atunci $\{na\}=\{n(b+k)\}=\{nb+nk\}=\{nb\}$ **1p**

b) Din identitatea lui Hermite : $[2a]=a+\frac{1}{2}-\{2b\}\overset{ipoteza}{\Rightarrow}[2a]=a+\frac{1}{2}-\{2a\}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$ **2p**

Obţinem b **1p**

3. $1\in G\overset{b}{\Rightarrow}\sqrt{3}\in G\Rightarrow\sqrt{0+3}\in G\overset{c}{\Rightarrow}4\in G\overset{b}{\Rightarrow}\sqrt{6}\in G\Rightarrow\sqrt{3+3}\in G\overset{c}{\Rightarrow}7\in G\overset{b}{\Rightarrow}$
$\sqrt{7+2}=3\in G\overset{b}{\Rightarrow}\sqrt{5}\in G\Rightarrow\sqrt{2+3}\in G\overset{c}{\Rightarrow}6\in G$ **3p**

Demonstrăm prin inducţie propoziţia P(n) : $3n\in G, n\in\mathbb{N}^*$.

I) P(1): $3\in G$ (A)

II) Presupunem că $3k\in G\overset{b}{\Rightarrow}\sqrt{3k+2}\in G\Rightarrow\sqrt{(3k-1)+3}\in G\overset{c}{\Rightarrow}3k+3\in G$ **2p**

Cum $2013=3\cdot 671\Rightarrow 2013\in G\overset{b}{\Rightarrow}\sqrt{2015}\in G$ **2p**

4. Avem $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}$ **2p**

Cum $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{PA}$ şi $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AP}\Rightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=4\overrightarrow{PA}$ **2p**

Considerăm Q mijlocul lui $[BC]\Rightarrow\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow 2\overrightarrow{QA}=4\overrightarrow{PA}\Rightarrow\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AP}.$

Atunci A,P,Q sunt coliniare și P este mijlocul lui (AQ). Dar P este mijlocul lui (MN).
Rezultă că ANQM este paralelogram **1p**
Atunci MQ este linie mijlocie, deci M este mijlocul lui (AB) și CM este mediană...........**1p**
Analog BN este mediană...**1p**